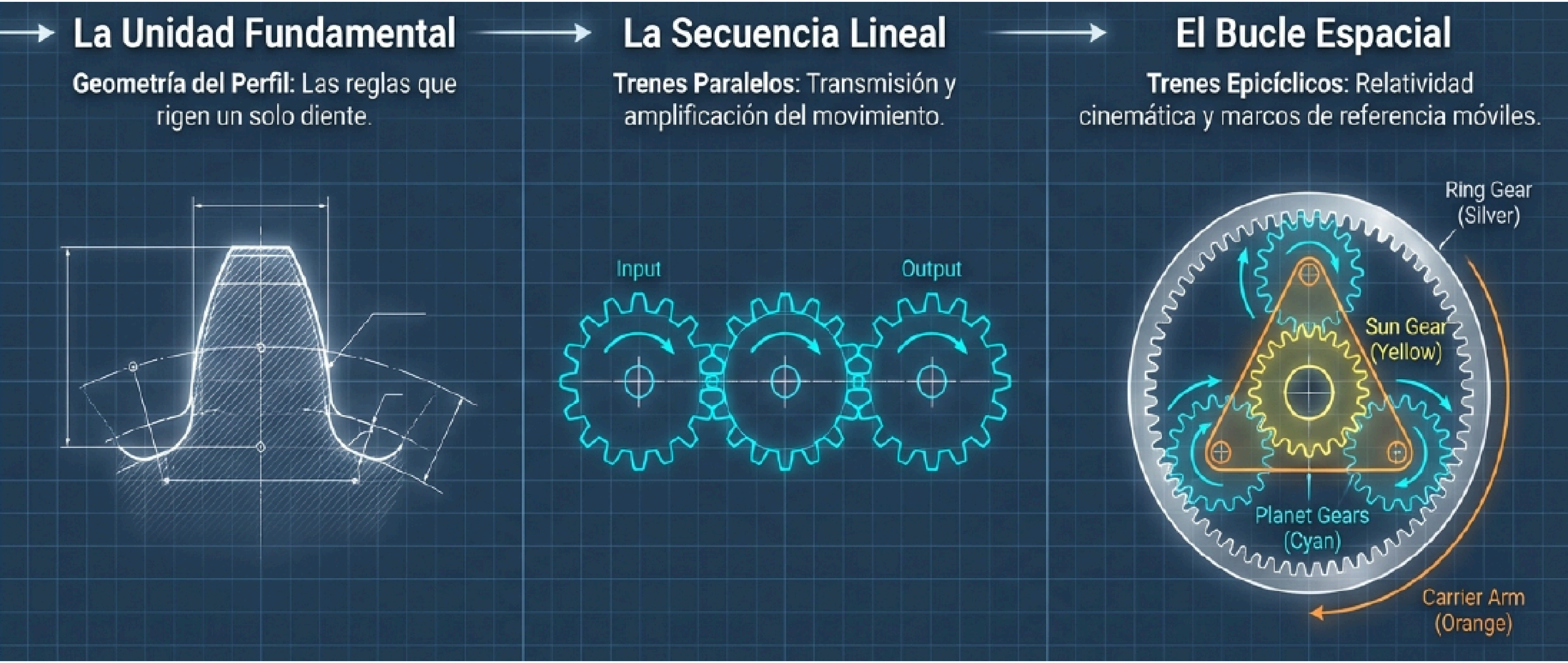
Cinemática y geometría de engranes

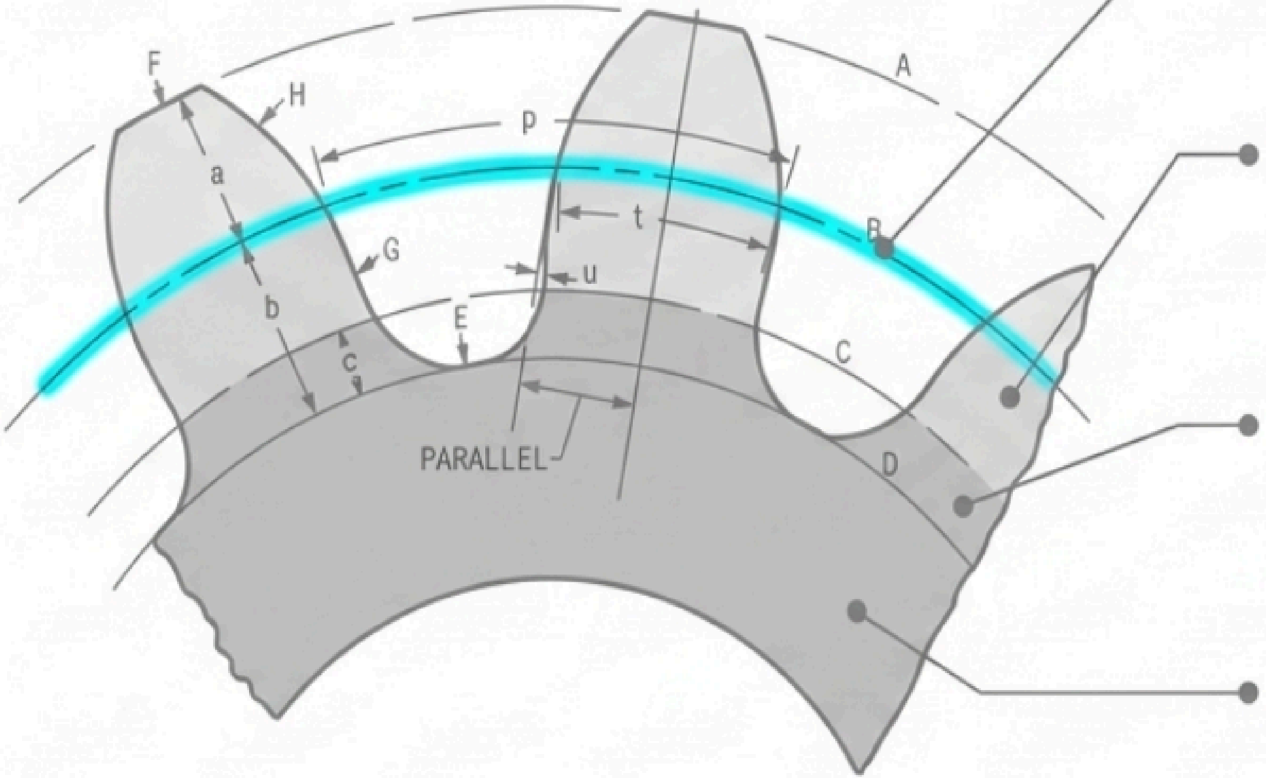
Profesor: Ing. Israel Chaves Arbaiza

Curso: Elementos de Máquinas II


La Unidad Fundamental
Geometría del Perfil: Las reglas que rigen un solo diente.
La Secuencia Lineal
Trenes Paralelos: Transmisión y amplificación del movimiento.
Input
Output
El Bucle Espacial
Trenes Epicíclicos: Relatividad cinemática y marcos de referencia móviles.
Ring Gear (Silver)
Sun Gear (Yellow)
Planet Gears (Cyan)
Carrier Arm (Orange)

El mapa topográfico del engrane

Todo cálculo cinemático comienza con el diámetro de paso (**d**). Es una circunferencia teórica sobre la cual se basan todas las matemáticas del engrane.



- **Círculo de paso**: Superficie teórica de rodadura libre de deslizamiento.
- **Addendum (Cabeza)**: Distancia radial desde el círculo de paso hasta la cresta del diente. Para dientes estándar, equivale a 1/P.
- **Dedendum (Raíz)**: Distancia radial desde el círculo de paso hasta el fondo del espacio. Equivale a 1.25/P.
- **Profundidad total**: La suma exacta del addendum y el dedendum.

```
Profundidad total = Addendum + Dedendum
```

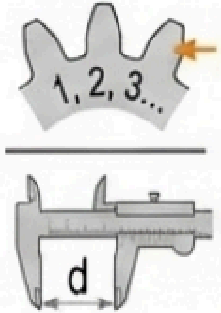
Las tres métricas de proporcionalidad

La compatibilidad entre dos engranes exige que compartan la misma proporción de tamaño de diente.

Paso Diametral (P)

El índice principal en el sistema inglés. Número de dientes por pulgada de diámetro.

$$P = \frac{N}{d}$$



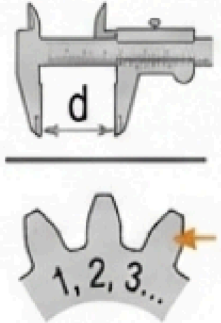
N (Número de dientes)

d (Diámetro en pulgadas)

Módulo (m)

El índice métrico. Milímetros de diámetro de paso por cada diente.

$$m = \frac{d}{N}$$



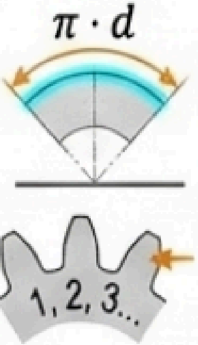
d (Diámetro en milímetros)

N (Número de dientes)

Paso Circular (p)

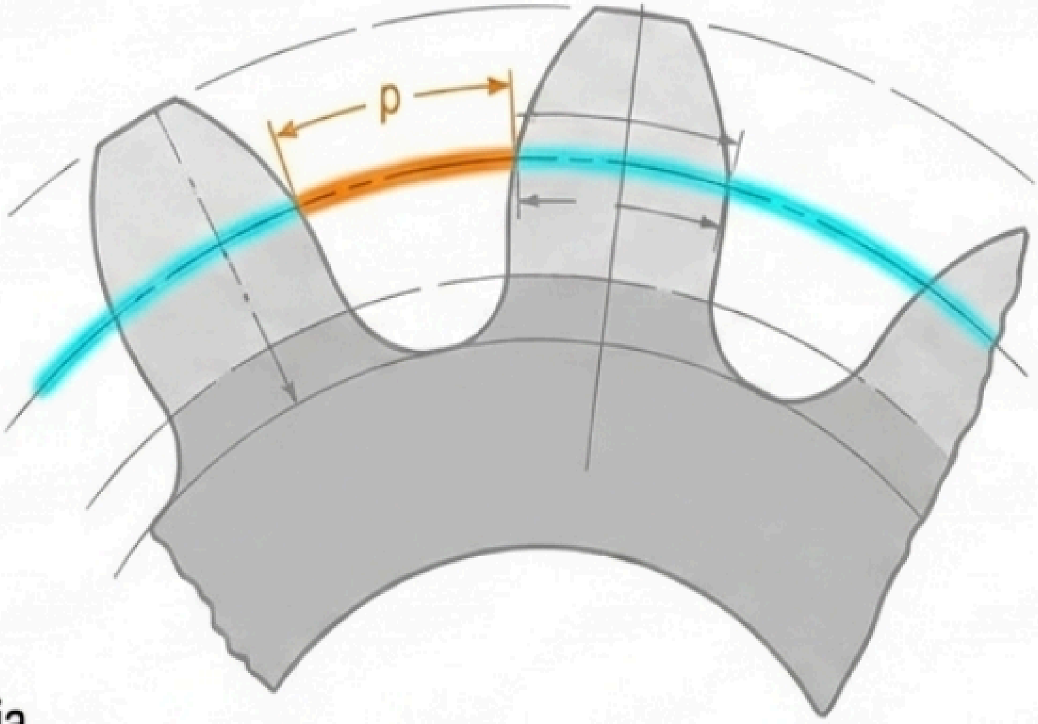
Distancia de un punto a su homólogo en el diente adyacente, medida sobre el círculo de paso.

$$p = \frac{\pi \cdot d}{N}$$



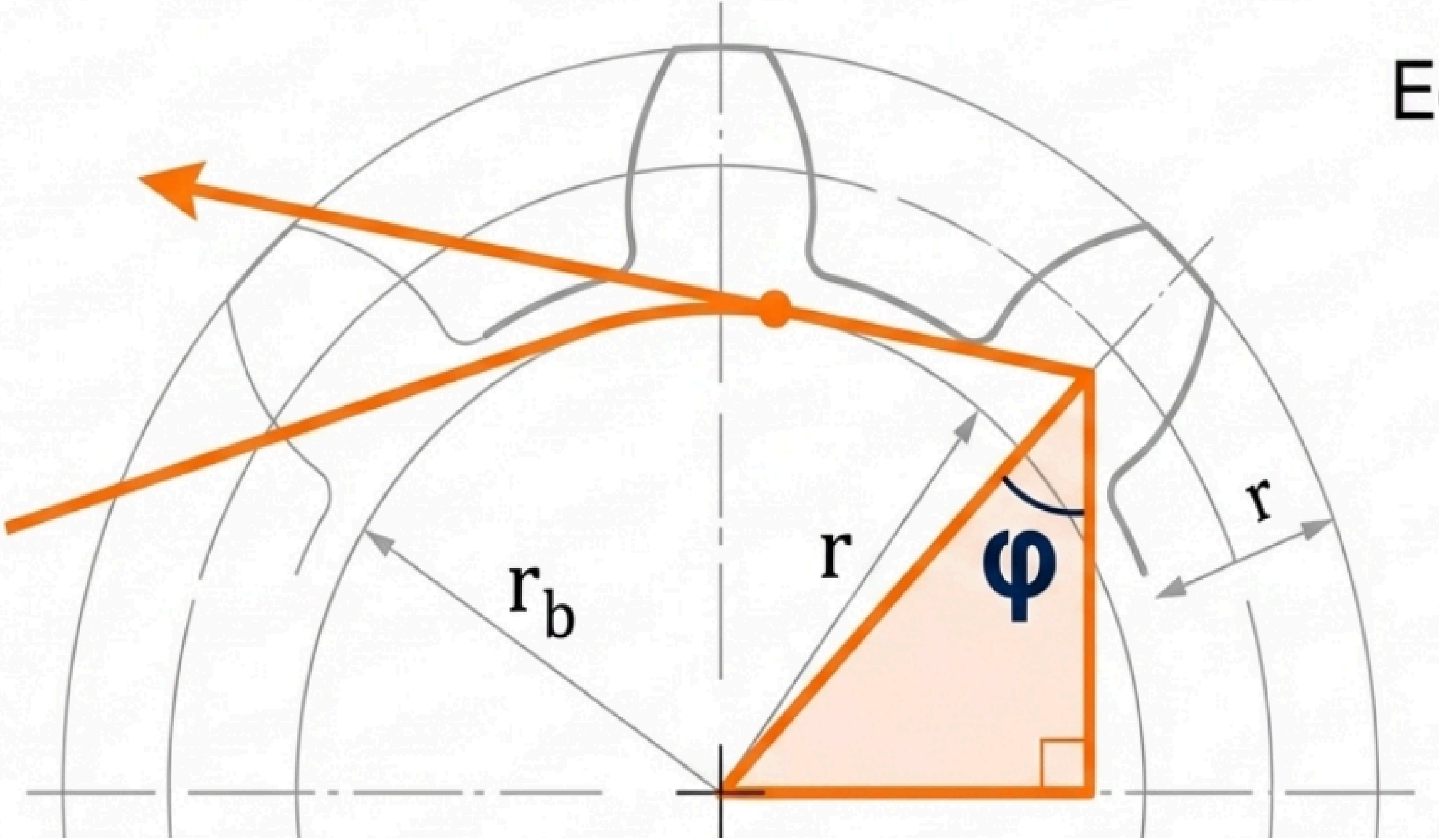
π · **d** (Circunferencia de paso)

N (Número de dientes)



El origen de la envolvente y el círculo base

El perfil del diente no es un arco aleatorio; es una curva envolvente (involute). Imagina una cuerda tensa desenrollándose de un cilindro (el círculo base). La trayectoria del extremo de esa cuerda traza la cara del diente. La cinemática de transmisión depende de la línea de presión, cuyo ángulo (φ) dicta el tamaño absoluto del círculo base respecto al círculo de paso.

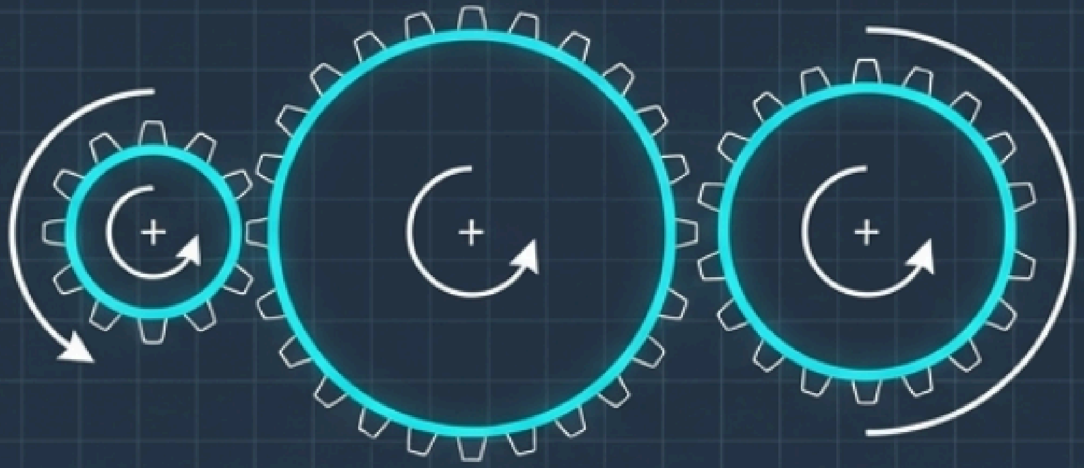


Ecuación fundamental:

$$r_b = r \cdot \cos \phi$$

Trenes de engranes

Tren Simple

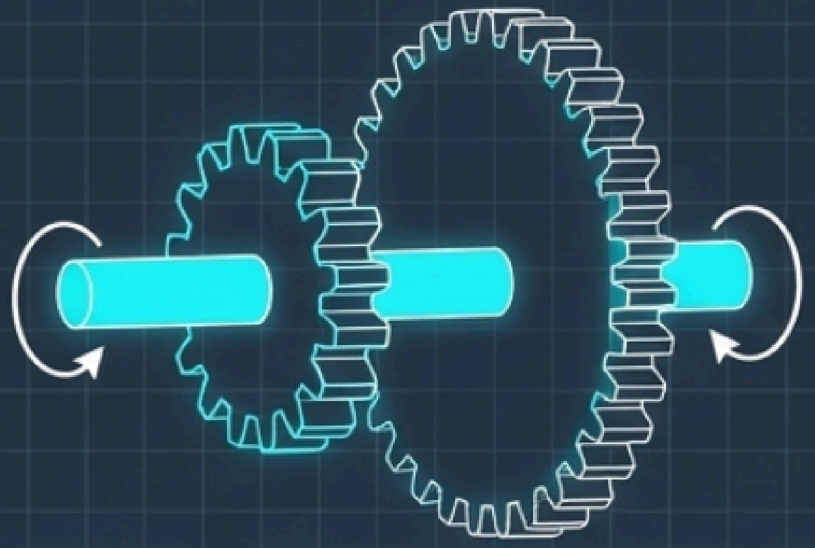


Eficiencia Espacial
- Baja.

Rol del Engrane Intermedio
- Solo cambia la dirección de rotación, no afecta la relación final.

Límite Práctico de Reducción
- ≈ 10:1.

Tren Compuesto



Eficiencia Espacial
- Alta densidad de transmisión.

Relación Total
- Multiplicativa.

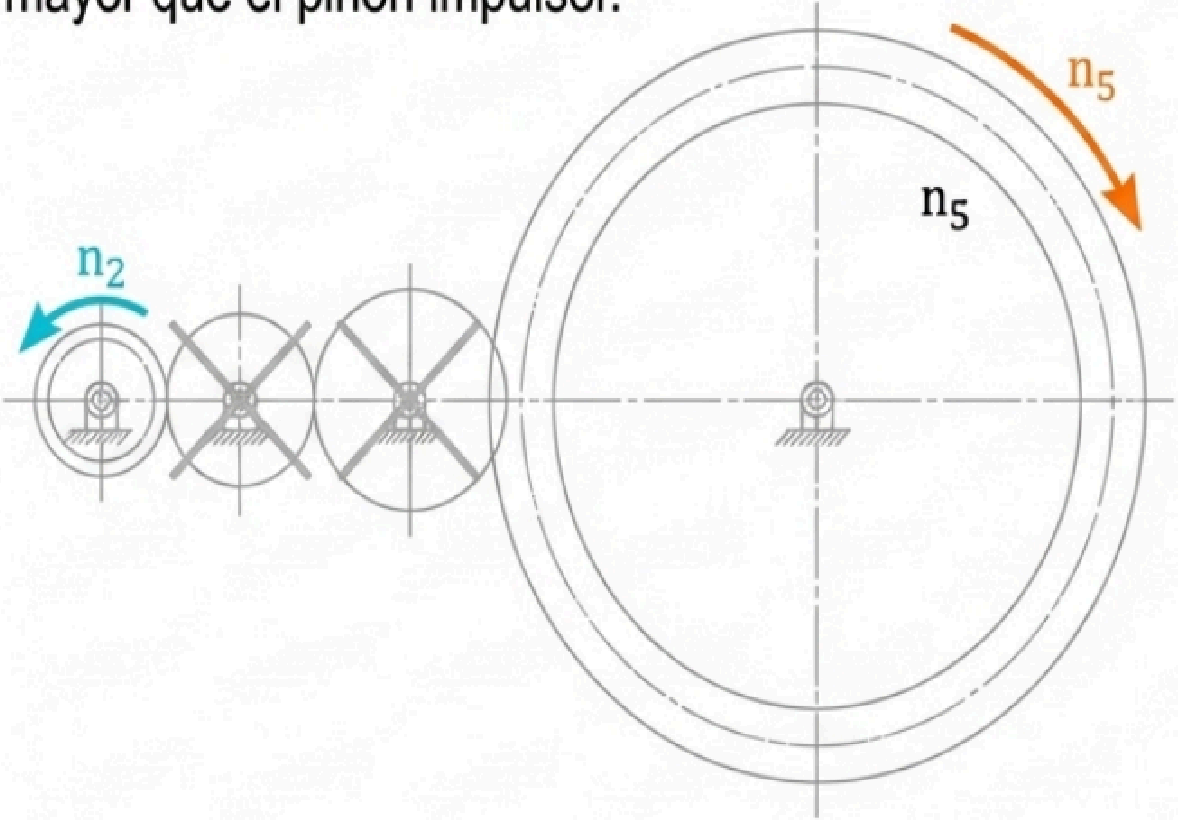
Límite Práctico de Reducción
- Permite reducciones de hasta 100:1 en un volumen compacto.

La barrera espacial de los trenes simples

Un tren simple contiene un solo engrane por eje. El ratio de velocidad se determina únicamente por el primer y último engrane; los engranes intermedios (locos o idlers) solo cambian la dirección de rotación, no la magnitud.

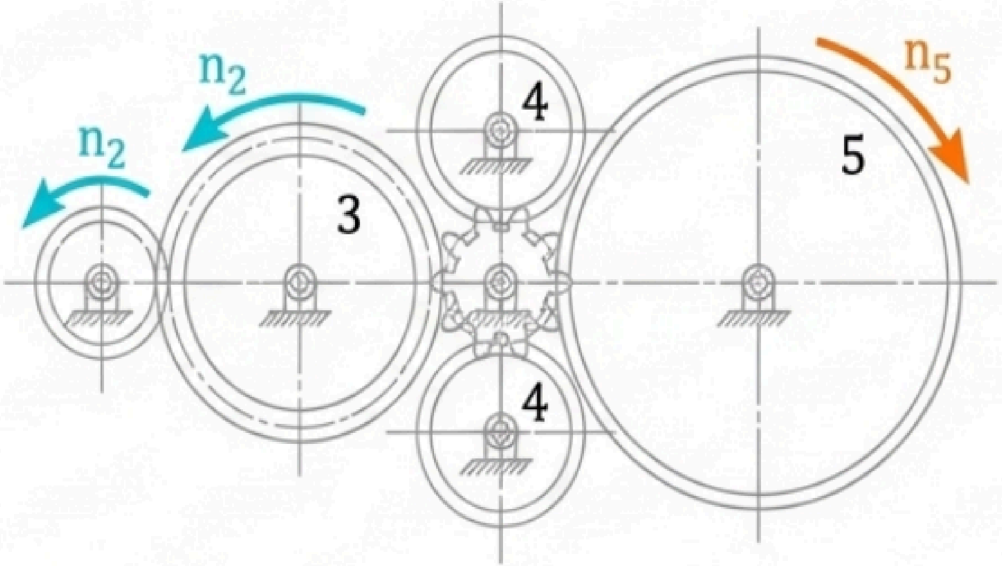
El problema espacial:

Para lograr una reducción de 12:1 en un tren simple, el engrane final requeriría un diámetro 12 veces mayor que el piñón impulsor.



La solución:

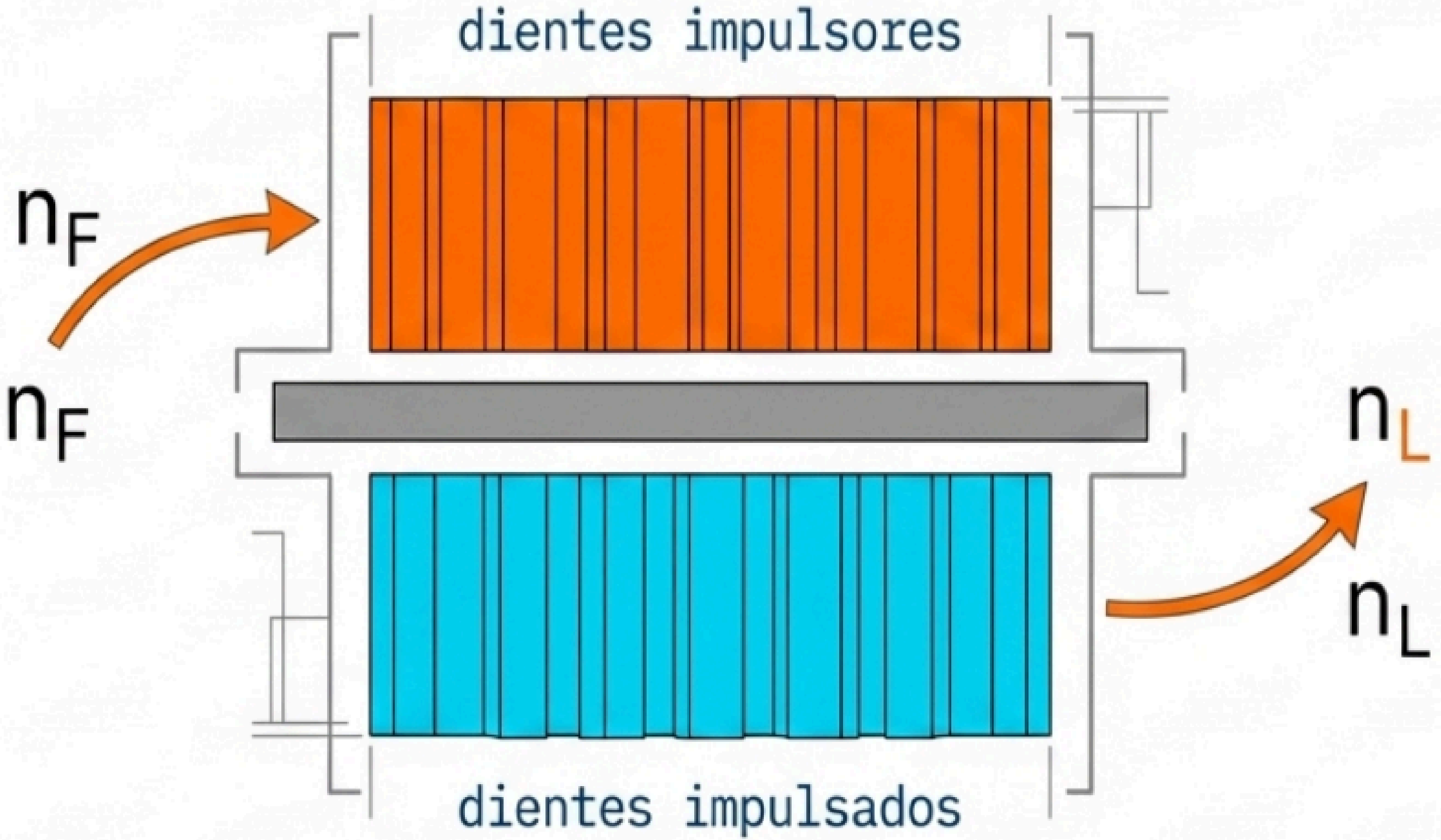
Los trenes compuestos colocan múltiples engranes en un solo eje, multiplicando las relaciones de transmisión en fracciones del espacio.



$$n_5 = -\frac{N_2}{N_3} \cdot \frac{N_4}{N_5} \cdot n_2$$

El valor del tren (e) como máquina de fracciones

El valor del tren (e) consolida todo el sistema en un solo factor de multiplicación. Se define algebraicamente como:



$$e = \frac{\text{Producto de dientes impulsores}}{\text{Producto de dientes impulsados}}$$

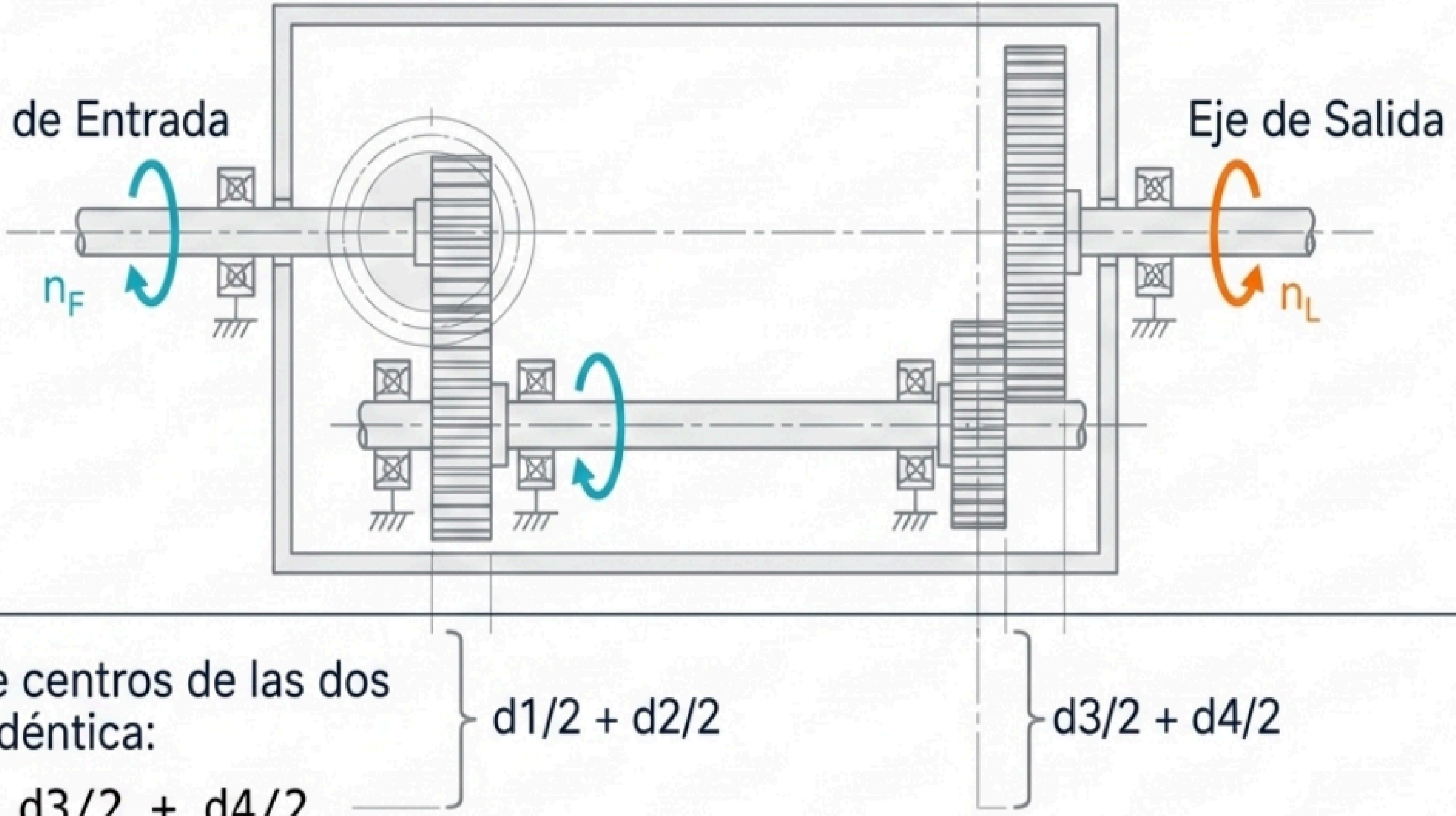
Convención de signos:

- Positivo (+): El último engrane gira en la misma dirección que el primero.
- Negativo (-): El último engrane gira en dirección opuesta (contrarrotación).

$$n_L = e \cdot n_F$$

Trenes revertidos: La restricción arquitectónica

Un tren revertido alinea coaxialmente el eje de entrada con el eje de salida. Esta configuración es ideal para cajas de cambio compactas, pero impone una condición geométrica estricta.



La distancia entre centros de las dos etapas debe ser idéntica:

$$d1/2 + d2/2 = d3/2 + d4/2$$

Considerando que la distancia entre los centros de la entrada y la salida deben ser iguales:

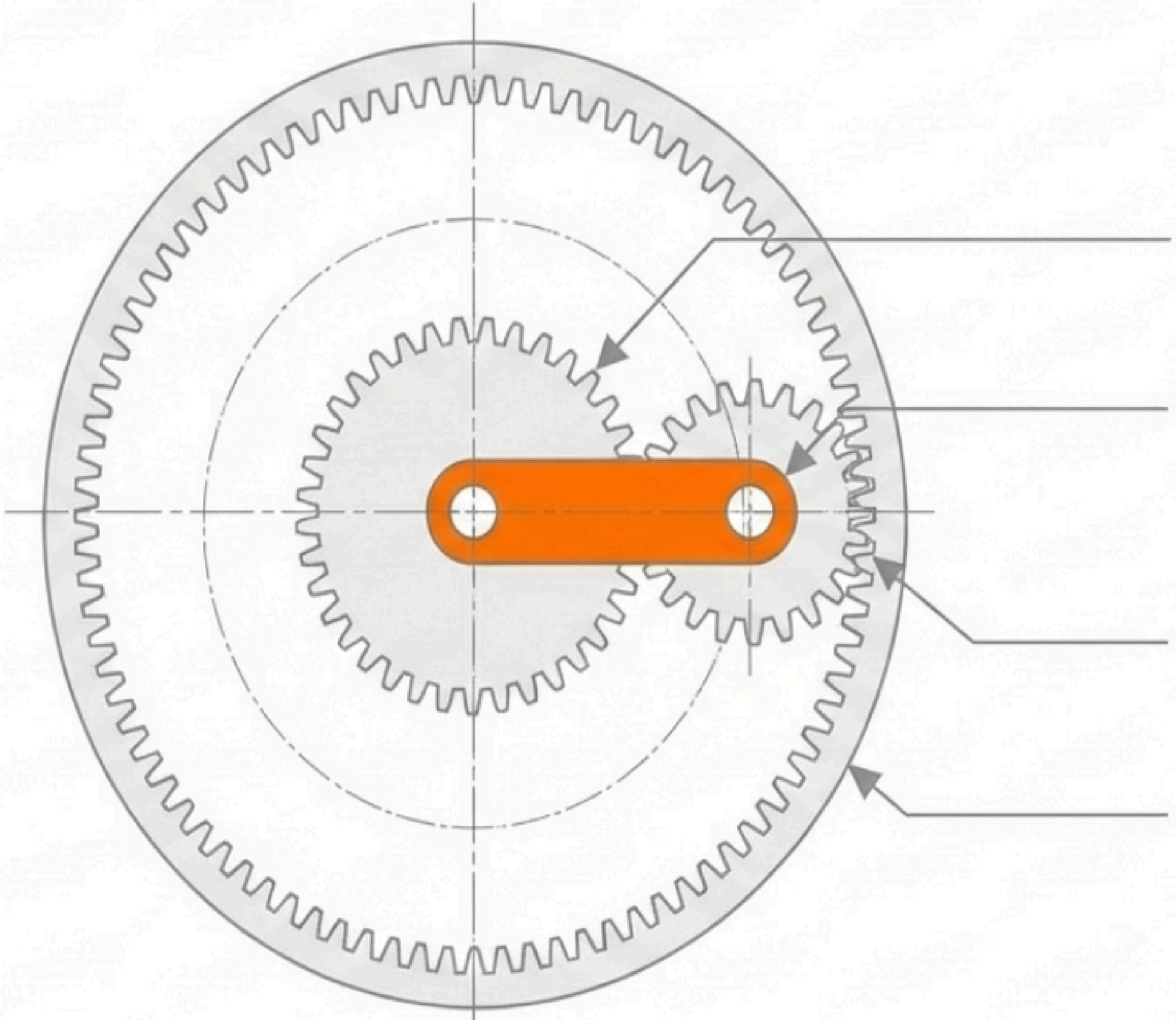
$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{d_3}{2} + \frac{d_4}{2},$$

Si todos los engranes comparten el mismo módulo o paso diametral, el conteo de dientes queda forzado por la geometría de tal manera que:

$$N_1 + N_2 = N_3 + N_4$$

El salto de paradigma: Ejes de rotación en movimiento

Hasta ahora, todos los ejes han permanecido fijos respecto al marco de referencia. Los trenes planetarios (epicíclicos) rompen esta regla. Son sistemas con dos grados de libertad. Requieren dos entradas **(o una entrada y un elemento fijo)** para resolverse cinemáticamente.

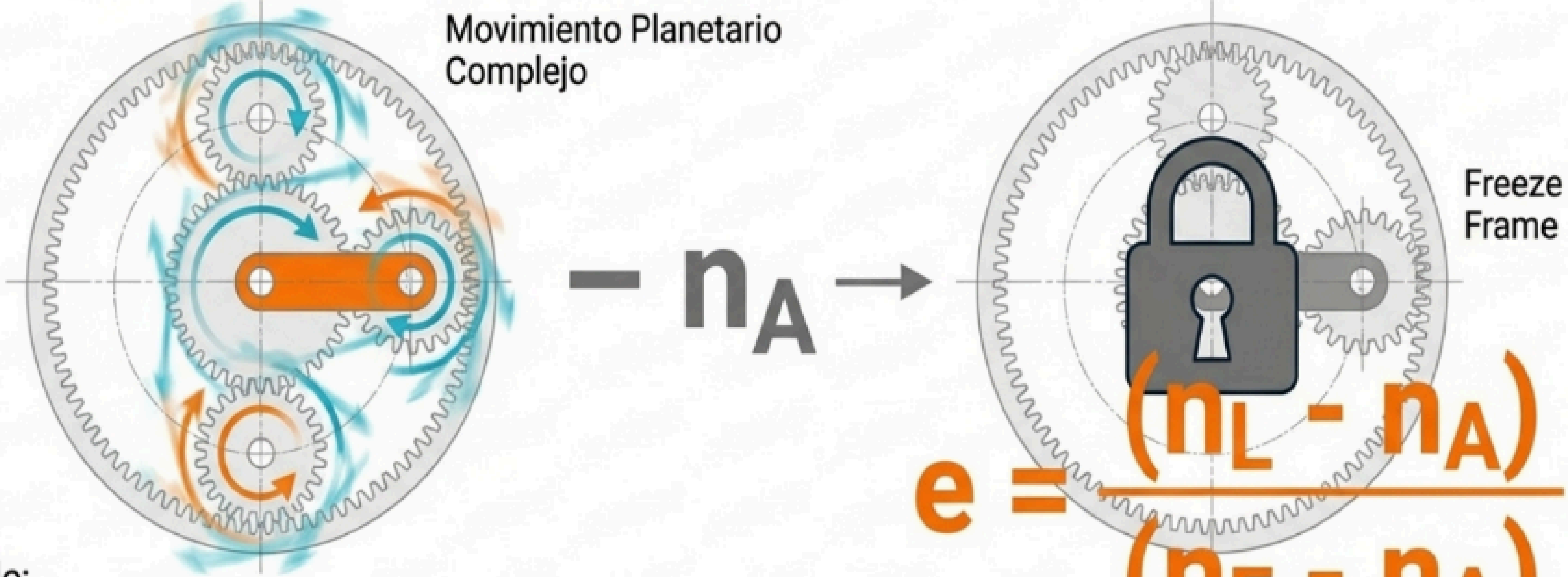


Anatomía Planetaria:

1. **Engrane Sol**: Engrane central de eje fijo.
2. **Brazo (Portaplanetas)**: Eslabón que orbita el centro, portando los ejes móviles.
3. **Planetas:** Engranes de eje móvil que orbitan el sol.
4. **Corona:** Engrane interno que encierra el sistema.

La transformación del marco de referencia

Para calcular las velocidades en un tren planetario, restamos la velocidad del brazo (**n_A**) a todo el sistema. Al hacer **$n_{relativo}$** = **$n_{absoluto}$** – **n_A**, el brazo se detiene matemáticamente (velocidad cero). El tren planetario se convierte **instantáneaamente en un tren ordinario estacionario**, permitiéndonos usar la misma fórmula del **Valor del Tren** (e):



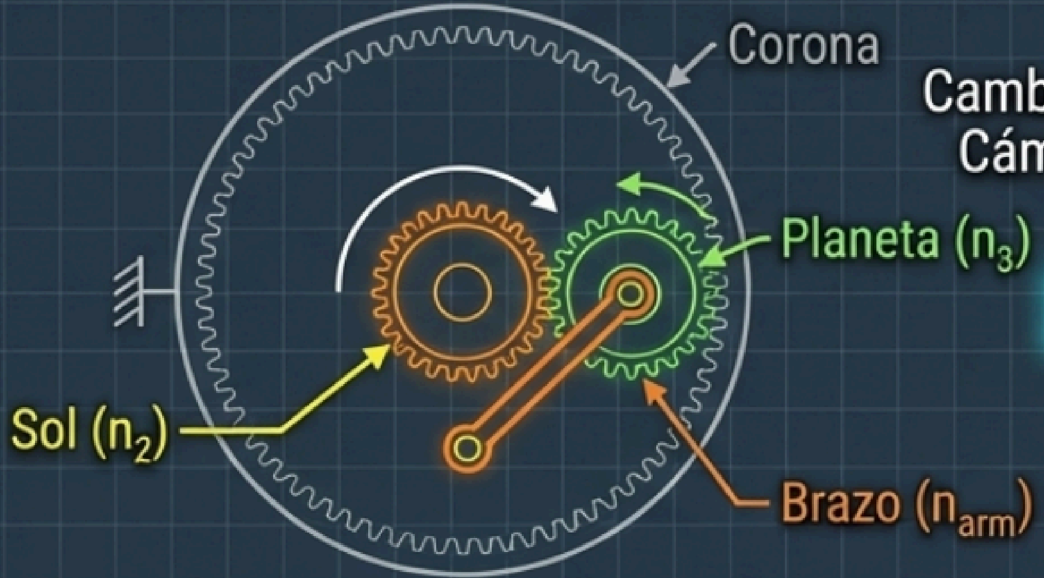
$$e = \frac{(n_L - n_A)}{(n_F - n_A)}$$

Donde:

- **n_F** = Velocidad del primer engrane (generalmente el sol)
- **n_L** = Velocidad del último engrane (generalmente la corona)
- **n_A** = Velocidad del brazo portaplanetas

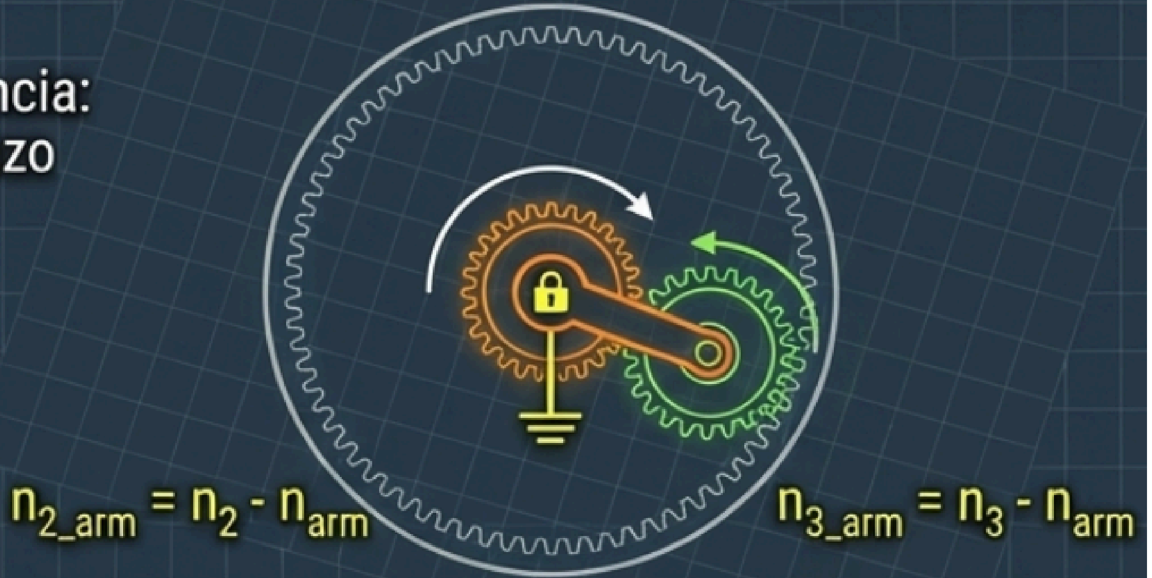
La Cinemática Planetaria: Relativa vs. Absoluta

Cámara Fija (Rotación Absoluta)



Cambio de Referencia:
Cámara en el Brazo

Cámara en el Brazo (Rotación Relativa)



Todos los componentes giran respecto a un marco fijo (Tierra). Velocidades absolutas.

El brazo se considera estacionario. El universo gira alrededor del brazo con velocidad $-n_{arm}$.

Deducción Fundamental:

Sustituyendo velocidades absolutas por velocidades relativas en $n_L = e \cdot n_F$:

$$(n_L - n_A) = e \cdot (n_F - n_A)$$

Ecuación 13-32 (Cinemática Planetaria)

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}$$

Matriz de topología cinemática

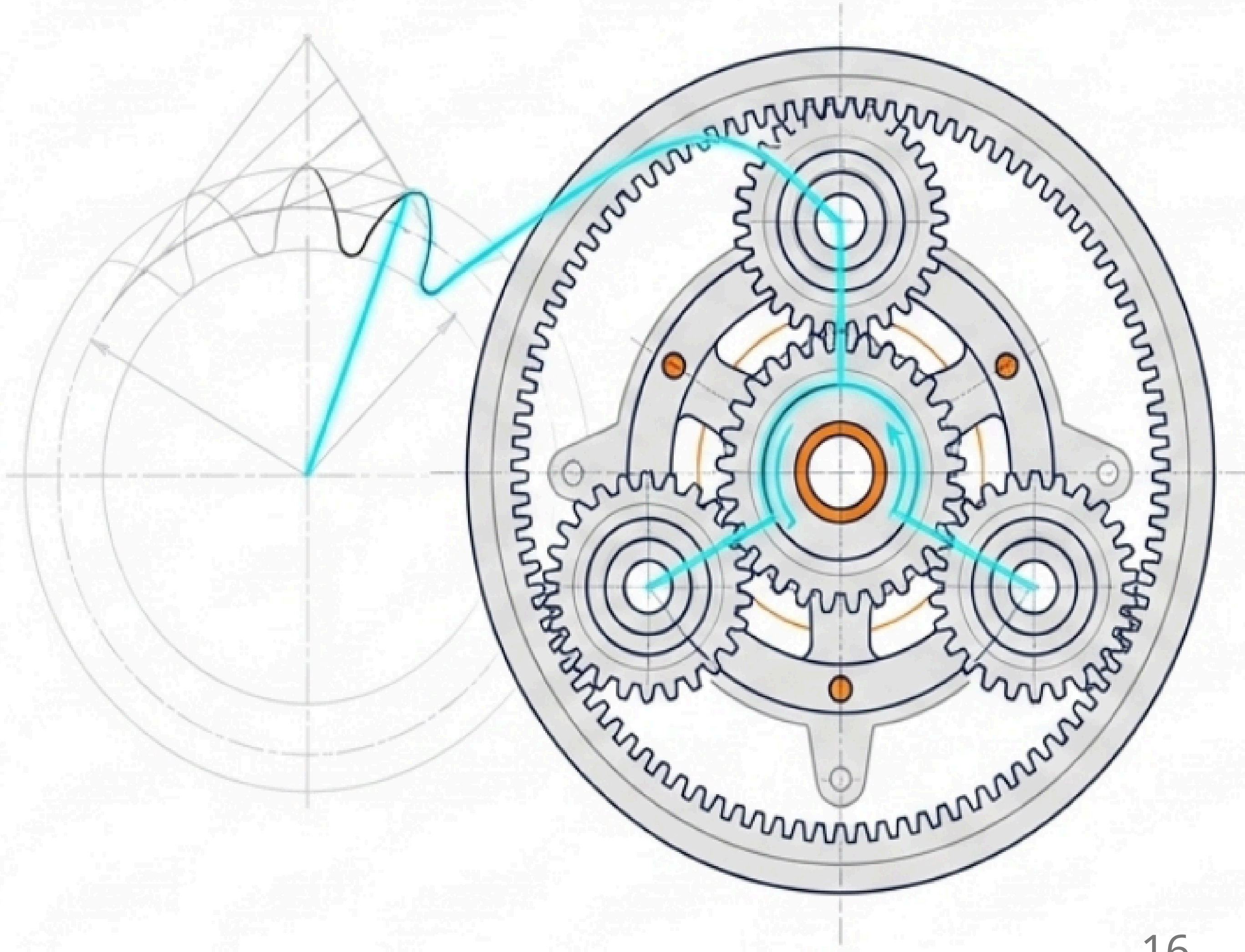
Evaluación arquitectónica de sistemas de transmisión para toma de decisiones de diseño.

	Estado de los Ejes	Grados de Libertad (DOF)	Relación de Transmisión Máx	Eficiencia Espacial	Carga en Rodamientos
Tren Simple	Fijos ✓	1	Baja (~10:1)	Pobre (-) ⊖	Alta (-) ⊖
Tren Compuesto	Fijos ✓	1	Alta (~100:1)	Buena (+) ⊕	Alta (-) ⊖
Tren Planetario	Fijos + Orbitales ✓	2	Muy Alta (++) ⊕⊕	Excelente (++) ⊕⊕	Balanceada (+) ⊕

De la geometría simple a la computación mecánica

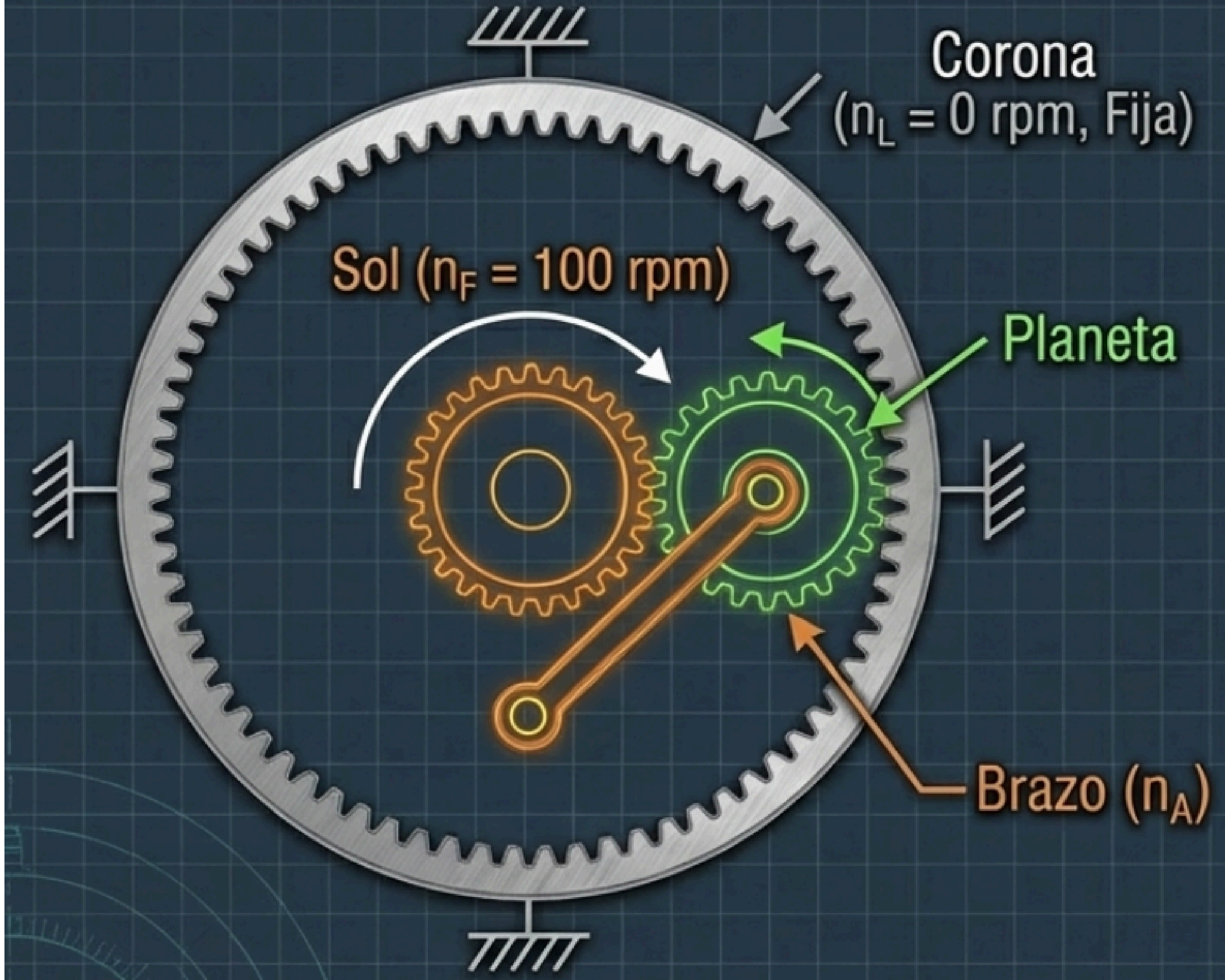
La transmisión de engranes es una demostración perfecta del escalamiento en ingeniería.

1. Hemos definido la curvatura microscópica que transfiere fuerza (la envolvente).
2. Agrupamos esos dientes en cilindros sobre ejes fijos (flujo lineal).
3. Liberamos los ejes para crear computadoras mecánicas capaces de sumar, restar y dividir velocidades (flujo relativo).



Dominar la base permite diseñar sistemas infinitamente complejos con absoluta precisión matemática.

Aplicación Funcional: Reductor con Corona Fija



Paso 1: Identificar Entradas

- Entrada (n_F) = Engrane Sol a 100 rpm
- Corona (n_L) = 0 rpm (Bloqueada mecánicamente)
- Incógnita = Velocidad del Brazo (n_A)

Paso 2: Sustitución en Ec. 13-32

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A}$$

$$e = \frac{0 - n_A}{100 - n_A}$$

Paso 3: Despeje

$$e \cdot (100 - n_A) = -n_A$$

$$100e - e \cdot n_A = -n_A$$

$$n_A \cdot (1 - e) = -100e$$

$$n_A = \frac{-100e}{1 - e}$$

Al fijar la corona, el brazo se convierte en el puerto de salida, operando como un reductor de velocidad de alta densidad.