

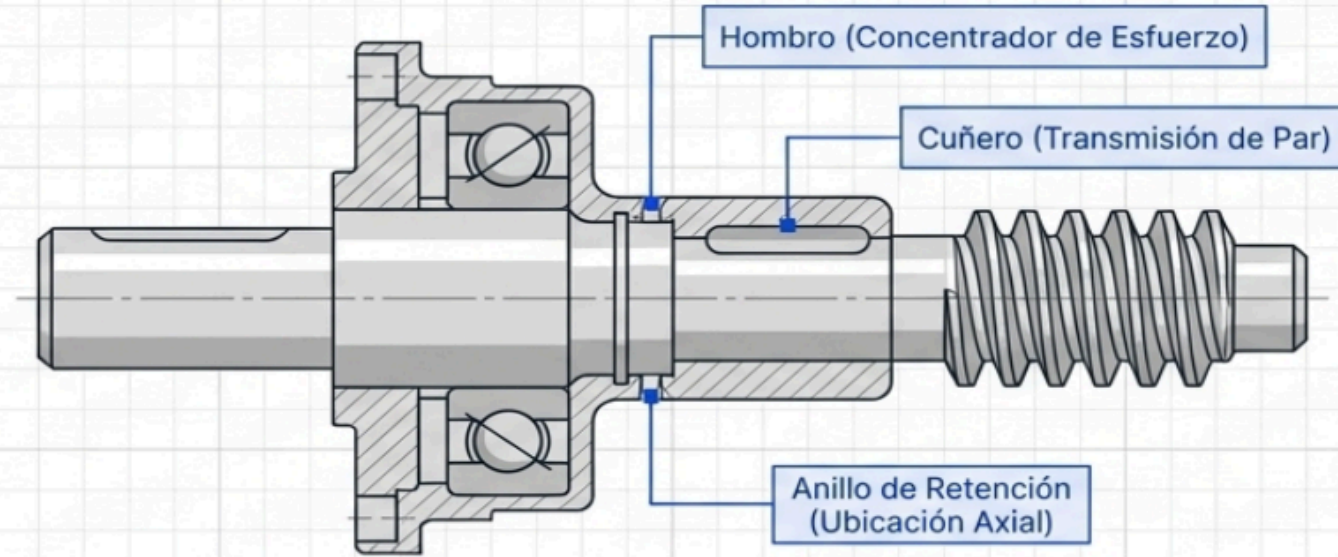
Diseño de ejes mecánicos

Profesor: Ing. Israel Chaves Arbaiza

Curso: Elementos de Máquinas II



La Anatomía del Eje y el Dominio de la Fatiga



1. Configuración Geométrica

Típicamente un cilindro escalonado. Los hombros fijan la posición axial, los cuñeros transmiten el par de torsión.

Cada discontinuidad castiga la geometría introduciendo concentraciones de esfuerzo.

2. Selección de Materiales

Estándar inicial: Acero de bajo/medio carbono (*AISI* 1020 a 1050, **laminado o estirado en frío**).

La rigidez elástica (E) es constante; la resistencia última depende del tratamiento.

3. El Factor Dominante: La Carga Dinámica

Bajo rotación, un momento flexionante estático se convierte en un esfuerzo completamente reversible.

La falla por fatiga domina el diseño muy por encima de la fluencia estática.

El Límite de Resistencia a la Fatiga (S_e): Ecuación de Marin

k_a : Superficie

Penaliza acabados rugosos (maquinado, forjado).
Ecuación empírica: $a(S_{ut})^b$

k_b : Tamaño

A mayor diámetro del eje, mayor probabilidad estadística de defectos internos.

k_c : Carga

Flexión pura = 1.0.
Carga axial = 0.85.
Torsión = 0.59.

$$S_e = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot S_e'$$

S_e' : Límite Teórico

Viga rotatoria ideal.
 $0.5 S_{ut}$ para aceros hasta 200 kpsi.

k_d : Temperatura

Castiga el límite en operaciones sostenidas por encima de la temperatura ambiente.

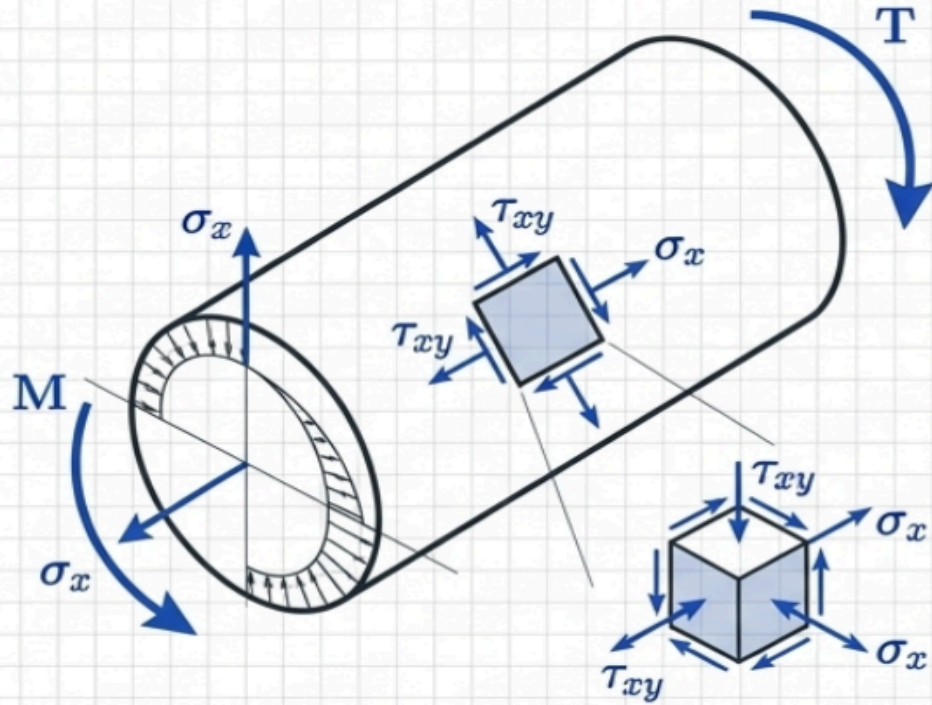
k_e : Confiabilidad

Ajuste estadístico.
Ej. 99% de confiabilidad penaliza con un factor de 0.814.

k_f : Efectos Varios

Corrosión, recubrimientos superficiales, o concentración de tensiones residuales.

Esfuerzos Combinados: Flexión y Torsión en Ejes Sólidos



El criterio de Energía de Distorsión (Von Mises) combina el esfuerzo normal por flexión y el esfuerzo cortante por torsión en una sola magnitud equivalente.

Esfuerzo de Von Mises Alternante (Componente Dinámica)

$$\sigma_a' = \left[\left(\frac{32 \cdot K_f \cdot M_a}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 \cdot K_{fs} \cdot T_a}{\pi \cdot d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$





Integra los momentos flexionantes variables y los concentradores locales de fatiga (K_f , K_{fs}).

Esfuerzo de Von Mises Medio (Componente Estática)

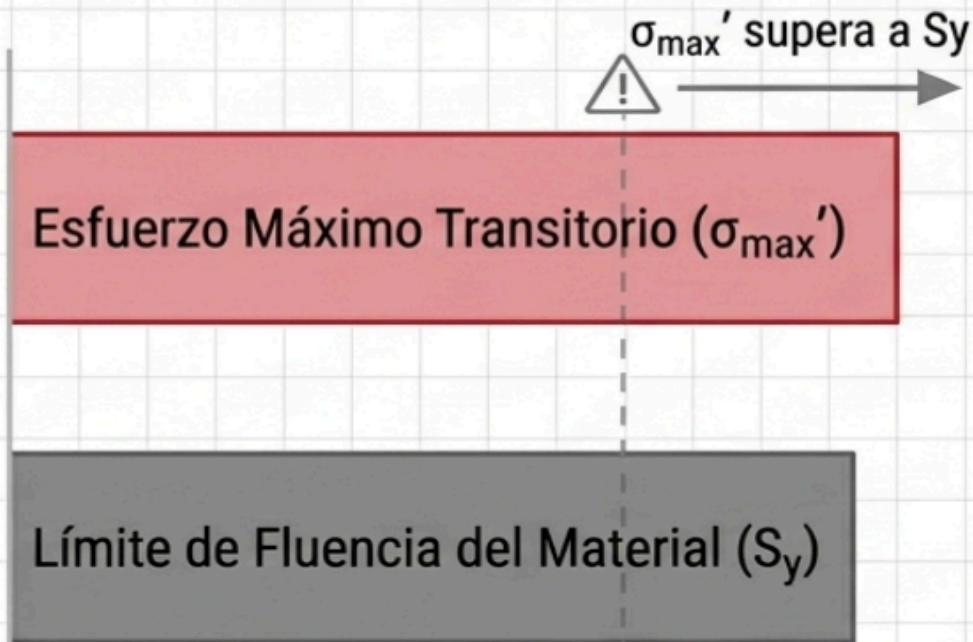
$$\sigma_m' = \left[\left(\frac{32 \cdot K_f \cdot M_m}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 \cdot K_{fs} \cdot T_m}{\pi \cdot d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Síntesis Estructural: La vasta mayoría de ejes de transmisión experimentan flexión completamente reversible ($M_m = 0$) combinada con un par de torsión constante en operación ($T_a = 0$). Esto simplifica radicalmente la matriz de esfuerzos.

Fronteras de Seguridad: Matriz Comparativa de Criterios de Falla

	Goodman Modificado	Gerber	ASME-Elíptica	Soderberg
Nivel de Conservadurismo	 <p>Moderadamente conservador (Lineal clásico)</p>	 <p>Menos conservador (Ajuste parabólico preciso a datos empíricos)</p>	 <p>Balanceado (Incluye explícitamente límite de fluencia)</p>	 <p>Altamente conservador (Se ancla en el límite de fluencia S_y)</p>
Ecuación Base (Filosofía)	$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n}$	$\frac{n \cdot \sigma_a}{S_e} + \left(\frac{n \cdot \sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1$	$\left(\frac{n \cdot \sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \sigma_m}{S_y} \right)^2 = 1$	$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n}$
Ecuación de Diseño Despejada para Diámetro (d)	$d = \left(\frac{16n}{\pi} \left\{ \frac{1}{S_e} [4(K_f \cdot M_a)^2 + 3(K_{fs} \cdot T_a)^2]^{1/2} + \frac{1}{S_{ut}} [4(K_f \cdot M_m)^2 + 3(K_{fs} \cdot T_m)^2]^{1/2} \right\} \right)^{1/3}$			
	Formulaciones equivalentes derivadas algebraicamente por el diseñador		Formulaciones equivalentes derivadas algebraicamente por el diseñador	

Verificación de Fluencia: El Control del Primer Ciclo



La Excepción Fundamental

Safety Check

La resistencia a la fatiga controla la vida infinita del diseño, pero la fluencia estática asume el control inmediato si ocurren cargas máximas transitorias o de arranque. El eje puede fallar plásticamente en la primera revolución antes de acumular ciclos.

Esfuerzo Máximo de Von Mises:

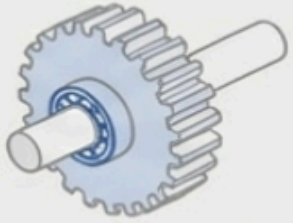
$$\sigma_{max}' = \left[\left(\frac{32 \cdot K_f (M_m + M_a)}{\pi \cdot d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{16 \cdot K_{fs} (T_m + T_a)}{\pi \cdot d^3} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Criterio de Aceptación (Factor contra Fluencia):

$$n_y = \frac{S_y}{\sigma_{max}'}$$

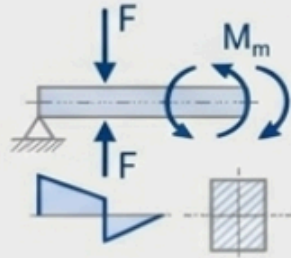
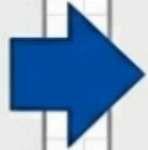
PRECAUCIÓN: Si $n_y < 1$, el eje sufrirá deformación plástica inmediata, lo cual invalida por completo cualquier análisis de vida por fatiga posterior.

Procedimiento de Diseño: Arquitectura de Solución



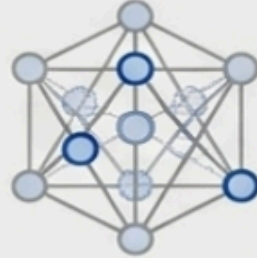
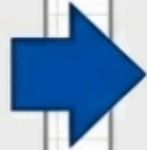
1. Topología

Esbozar la geometría preliminar y ubicar espacialmente los elementos transmisores (engranes, poleas) y de apoyo (cojinetes).



2. Cinética y Estática

Realizar diagramas de cortante y momentos flexionantes en dos planos. Determinar pares de torsión y ubicar las secciones críticas locales (ej. cuñeros con alto Momento).



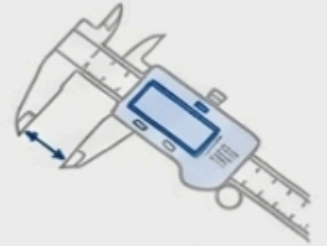
3. Selección de Material

Definir aleación (ej. AISI 1020 CD). Obtener rigidez y límites teóricos (S_y y S_{ut}) a partir de tablas del fabricante.



4. Factores de Fatiga

Estimar iterativamente los concentradores locales (K_f , K_{fs}) y calcular los modificadores de Marin para hallar el límite ajustado (S_e).

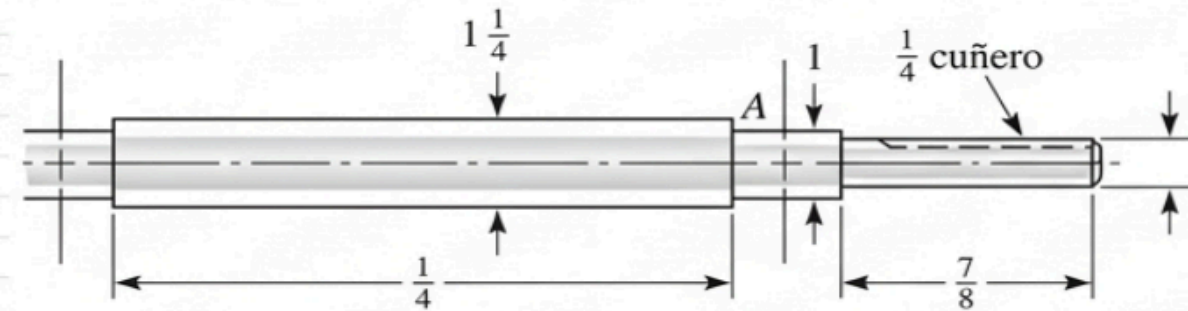


5. Síntesis Geométrica

Aplicar el criterio de falla seleccionado (ej. Goodman) para obtener diámetro mínimo 'd'. Iterar si la cota real modifica excesivamente los concentradores.

Aplicación Práctica: Análisis de un Eje en Operación (Parte I)

Entorno Físico y Datos



- Material: Acero AISI 1050 Estirado en Frío
- Resistencia (S_{ut}) = 100 kpsi, (S_y) = 84 kpsi
- Acabado Superficial: Maquinado
- Cargas en punto crítico (un cuñero):
 $M_a = 3750$ lbf-in (Momento flexionante alternante)
 $T_m = 3240$ lbf-in (Torsión media estable)
 $M_m = 0$, $T_a = 0$

Protocolo Analítico Inicial

Cálculo del Límite Teórico (Viga Rotatoria):

$$S_e' = 0.5(S_{ut}) = 0.5(100) = 50 \text{ kpsi}$$

Evaluación de Factores de Marin:

1. Superficie (k_a): $k_a = 2.70(100)^{-0.265} = 0.797$
2. Carga (k_c): $k_c = 1.0$ (Flexión/Torsión absorbidas vía Von Mises)
3. Tamaño (k_b): Se asume $k_b \approx 1$ para primera iteración (se validará post-cálculo).

Límite de Resistencia Ajustado Preliminar:

$$S_e = (k_a)(k_b)(k_c)(S_e')$$
$$S_e = (0.797)(1.0)(1.0)(50)$$
$$S_e \approx 39.8 \text{ kpsi}$$

Aplicación Práctica: Dimensionamiento y Verificación (Parte II)

Geometría Local y Esfuerzos

Concentradores en Cuñero Fresado:

- Relación base propuesta: $r/d = 0.02$
- Factor de sensibilidad y muesca (Flexión): $K_f = 2.14$
- Factor de sensibilidad y muesca (Torsión): $K_{fs} = 3.0$

Cálculo de Von Mises (Iteración para $d = 1.625$ in):

Esfuerzo Alternante (Flexión pura controlada):

$$\sigma_a' = \frac{32(2.14)(3750)}{\pi(1.625)^3} = 15,490 \text{ psi}$$

Esfuerzo Medio (Torsión sostenida):

$$\sigma_m' = \frac{\sqrt{3(16)(3.0)(3240)}}{\pi(1.625)^3} = 16,120 \text{ psi}$$

Resolución del Criterio de Falla

Criterio de Goodman Modificado (Fatiga):

$$\frac{1}{n_f} = \frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_{ut}}$$

$$\frac{1}{n_f} = \frac{15.49}{39.8} + \frac{16.12}{100}$$

$$n_f = 1.81 \quad (\checkmark \text{ Margen Aprobado para Fatiga})$$

Verificación de Primer Ciclo (Fluencia):

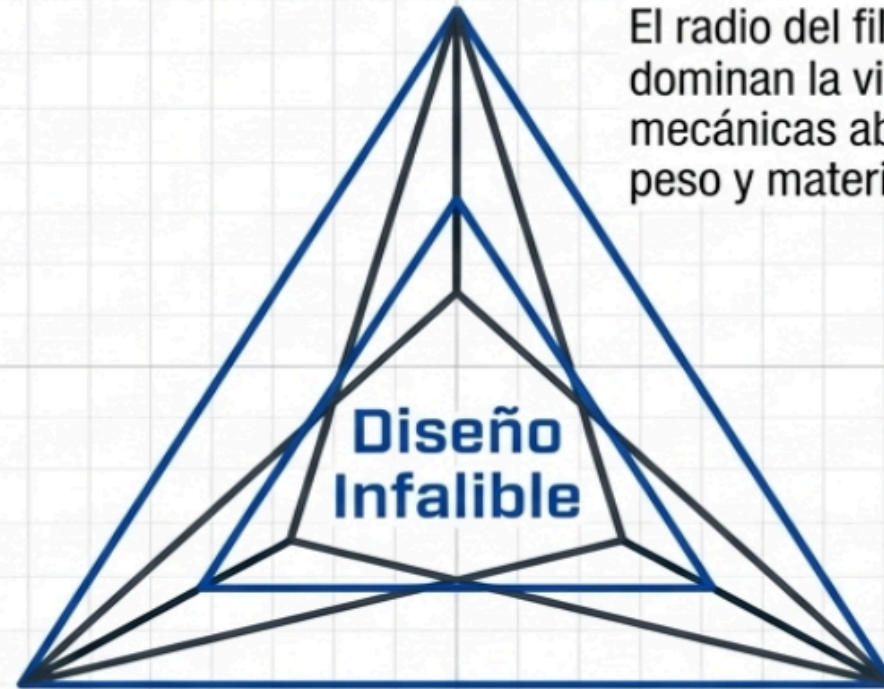
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma_{\max}'} = \frac{84}{(15.49 + 16.12)} = 2.65$$

Conclusión: Amplio margen estático garantizado. El diseño es seguro.

Síntesis: La Tríada del Diseño de Ejes

Morfología (Geometría Local)

El radio del filete y el diseño del cuñero (K_f , K_{fs}) dominan la vida útil. Eliminar discontinuidades mecánicas abruptas reduce drásticamente el peso y material necesario del eje.



Cinética (Esfuerzos Combinados)

Orquestar el equilibrio entre picos de flexión alternante (*Von Mises Dinámico*) provenientes de engranes, y par de torsión continuo y constante sostenido en la transmisión.

Metalurgia (Factores de Marin)

El límite teórico de resistencia a la tensión (S_{ut}) obtenido en laboratorio es irrelevante sin aplicar la penalización empírica severa por acabado superficial, dimensiones operacionales y temperatura real en el mundo físico.